

I1 KOMPLEXITÄT UND ALGORITHMEN – SEMINARARBEIT

Beweise der NP-Vollständigkeit Das Graph Genus Problem ist NP-Vollständig

Michael Herwig

Matrikelnummer: 301999

LEITER: Prof. Dr. Ir. Gerhard Woeginger

27. September 2017

Zusammenfassung

Im Seminar *Beweise der NP-Vollständigkeit* am Lehrstuhl *i1 Komplexität und Algorithmen* der *RWTH Aachen* wurde mir der Beweis der NP-Vollständigkeit des Graph Genus Problems zugeteilt. Diese Zusammenfassung des von *C. Thomassen* erbrachten Beweises erläutert die benutzten mathematischen Strukturen und Grundlagen sowie die im Beweis erbrachten Erkenntnisse.

1 Einführung

Für einen gegebenen Graphen G ist der *Genus* des Graphen $g(G)$ die kleinste natürliche Zahl, so dass G auf ein *surface* des Genus $g(G)$ eingebettet werden kann¹. Das Entscheidungsproblem, ob für ein gegebenen Graphen G und eine natürliche Zahl k die Aussage $g(G) \leq k$ gilt, wird als Graph Genus Problem bezeichnet. Carsten Thomassen zeigte in seiner Veröffentlichung *The Graph Genus Problem is NP-Complete*[1], dass das Graph Genus Problem NP-Vollständig ist. Der in der Veröffentlichung geführte Beweis dient als Grundlage dieser Ausarbeitung und wird in den folgenden Abschnitten erarbeitet. Dabei liegt der Schwerpunkt nicht auf der formellen Korrektheit oder Vollständigkeit, sondern auf einer für Einsteiger freundlichen Erläuterung, welche die konzeptionelle Rangeweise näher erläutert. Dafür werden erst eventuell fehlende Grundlagen wie Multigraphen, *embeddings* und formelle Definitionen zusammen mit eng im Bezug stehenden Herleitungen des Beweises erarbeitet. Auf dieser Grundlage aufbauend wird dann die im Beweis hauptsächlich genutzte Struktur (*double wheel*) eingeführt, um abschließend das *independent set* Problem auf das Graph Genus Problem zu reduzieren, womit der Beweis abschließt.

2 Präliminarien

In diesem Abschnitt werden die wesentlichen Grundbegriffe und Strukturen eingeführt, die dann in der anschließenden Erläuterung der Beweisführung gebraucht werden.

Multi-Graphen

Ein Multi-Graph ist ein Graph, der es erlaubt, mehrere Kanten zu haben, welche die selben Knoten mit einander verbinden und dennoch sich strukturell unterscheiden. Eine übliche Definition für ungerichtete Graphen ist durch eine mathematische Struktur $G = (V, E)$, wobei V die Menge der Knoten und E die Menge der Kanten ist. Meist ist E weiter definiert als das kartesische Produkt der Knotenmenge $E = V \times V$. Diese Definition ist aber stark an

¹Kanten, als Linien auf dem *surface*, dürfen sich dabei nicht schneiden.

gerichtete Graphen angelehnt und schwer erweiterbar². Eine andere Ansicht ist eine Kante als Menge von Knoten zu betrachten, die über diese Kante verbunden sind. Damit kann die Menge aller möglichen Kanten als Potenzmenge beschrieben und somit die Kanten klar definiert werden.

$$E \subseteq \{e \in \mathcal{P}(V) : |e| = 2\}$$

Diese Definition der Kanten lässt sich direkt auf eine Definition von Multi-Graphen erweitern indem E als Multimenge definiert wird. Des weiteren sind zwei Kanten strukturell ungleich solange sie nicht dasselbe Element der Multimenge referenzieren. Das heisst, zwei Kanten können zwar die gleichen Knoten verbinden aber trotzdem zwei unterschiedliche Kanten sein.

Rotationssystem

Sei $G = (V, E)$ ein Multigraph, so kann man ein Rotationssystem (eng. *rotation system*) auf diesem Graphen als zyklische Permutation der Kanten definieren.

Definition 1. Sei $G = (V, E)$ ein Multigraph, mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Ein Rotationssystem von G ist eine Menge $\Pi = \{\pi_1, \dots, \pi_{|V|}\}$ von zyklischen Permutation π_i über die Kanten inzident zu v_i .

Diese Definition des Rotationssystems weist jedem Knoten eine Permutation seiner inzidenten Kanten zu. Ferner kann man grafisch die Kanten so um den Knoten orientieren, das die Permutation einer Kante gleich dem Wählen der Kante ist, die als nächstes rechts liegt. Damit kommt das immer wieder aufeinander Ausführen einer Permutation einer Rotation um den Knoten gleich.

Definition 2. Sei G ein zusammenhängender Multigraph und Π ein dazugehöriges Rotationssystem. Dann ist das Tuple (G, Π) ein embedded multigraph, namentlich auch Π -embedding von G genannt.

facial walks

Weiter kann man diese Permutation für Pfade erweitern, indem jedem Tupel $(v_i, \{v_i, v_k\}) \in V \times E$ einen direkten Nachfolger $(v_j, \{v_i, v_j\})$ zugewiesen wird.

²Beispielsweise muss man für ungerichtete Graphen das Modell um die aussagenlogische Formel $\forall v_0, v_1 (E(v_0, v_1) \rightarrow E(v_1, v_0))$ erweitert werden.

Dieser Nachfolger ist eindeutig mittels der Permutation π_i bestimmbar durch $\pi_i(\{v_i, v_k\}) = \{v_i, v_j\}$. Führt man diese Kette weiter fort, bis man wieder das ursprüngliche Tupel erreicht hat, erhält man die Definition des Π -*facial-walk*.

Definition 3 (Π -*facial walk*). Sei $((V, E), \Pi)$ ein *embedded multigraph*. Eine Sequenz $x_0 e_0 x_1 \dots x_{r-1} e_{r-1} x_r$ abgekürzt $x_0 \dots x_r$ von Knoten und Kanten mit $e_i = (x_i, x_{i+1}) : 0 \leq i \leq r-1$ heißt Π -*facial walk* wenn $\pi_j(e_{i-1}) = e_{i\%r} : i \in \bar{r}$ gilt.

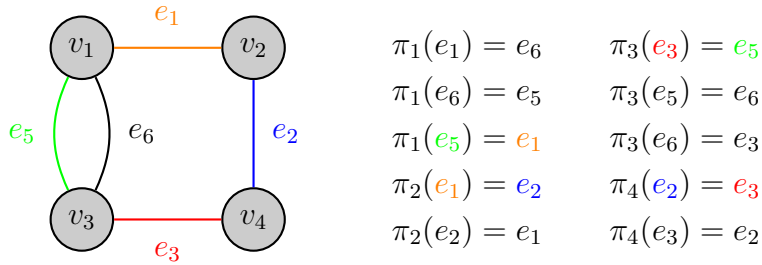


Abbildung 1: Beispielhafte Illustration eines Π -*facial walk*. Die Kanten sind im Graphen(links) entsprechend eingefärbt, wie sie in den Definitionen der Permutationen(rechts) genutzt wurden, um einen *facial walk* beginnend bei $(v_2, \{v_1, v_2\})$ zu finden.

Graph Genus

Mit der Definition des Multigraphen und des Π -*Embeddings* kann nun der Graph Genus formal definiert werden. Für einen *Embedded*-Multigraphen ergibt sich dieser direkt aus der Euler-Formel.

$$n - q + f = 2 - 2g(G, \Pi) \quad (1)$$

Hierbei ist n die Anzahl der Knoten, q die Anzahl der Kanten und f die Anzahl der Π -*facial walks*. Weiter lässt sich auf Basis der Euler-Formel und der Definition von *Embedded*-Multigraphen diese Definition für den Graph Genus von Graphen erweitern.

Definition 4 (Graph Genus). Für einen Graph G ist der Graph Genus $g(G)$ definiert als das Minimum aller Ganera über alle möglichen Π -*embeddings* von G .

$$g(G) = \min_{\Pi} g(G, \Pi)$$

Diese Definitionen ermöglichen im weiteren über den Genus eines Graphen mittels der Struktur der Π -facial walks sowie der Anzahl an Knoten und Kanten zu argumentieren. Drei besonders wichtige Eigenschaften, die dadurch besser beschrieben werden können, sind die des *facial excess* sowie Teil- und Supergraphen.

Definition 5 (Π -facial excess). Sei (G, Π) ein Π -embedding und $W = x_0 \dots x_r$ ein Π -facial walk. Wir definieren $r - 3$ als excess von W und den Π -facial excess $\text{fe}(\Pi, G)$ als die Summe aller excesses über alle Π -facial walks. Der facial excess steht im direkten Zusammenhang mit der Euler Formel.

$$\text{fe}(\Pi, G) = 6g(G, \Pi) - 6 + 3n - q.$$

Teilgraphen

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $H = (V', E')$ ein zusammenhängender Teilgraph. Ein Π -Embedding (Π, G) induziert ein *embedding* für H . Da H sich aus G durch sequentielles löschen von Kanten und Knoten erzeugen lässt, kann sich damit der Genus für H nur verringern und es gilt

$$g(H, \Pi') \leq g(G, \Pi)$$

und damit folgt

$$0 \leq g(H) \leq g(G) \tag{2}$$

.

Supergraphen

Für Supergraphen gilt ein ähnliches Verhältnis, bei dem ein neues *embedding* durch Einfügen von neuen Knoten und Kanten erweitert werden kann. Sei $G = (V, E)$ ein Supergraph von $H = (V, E \setminus \{e\})$ so kann ein Π -embedding von H so erweitert werden, dass beim Einfügen der Kante e ein *facial walk* an diesem Knoten in zwei gespalten wird. Damit erhöht sich der Graph Genus maximal um eins.

$$g(H) \leq g(G) + 1$$

Resultierend lässt sich eine direkte obere Schranke für den Genus eines beliebigen Graphen ableiten. Dafür wählt man einen Spannbaum $T = (V, E')$ von $G = (V, E)$. Dieser Spannbaum hat den Genus null. Dann kann T zu G erweitert werden durch das sukzessive Einfügen aller Kanten $E \setminus E'$. Da ein

Spannbaum genau $|V| - 1$ Kanten hat, ergibt sich damit $|E| - (|V| - 1)$ als Anzahl einzufügender Kanten. Zusammen mit der Abschätzung über Supergraphen lässt sich damit der Genus des Graphen abschätzen.

$$g(T) = 0 \leq g(G) \leq |E| - |V| + 1 \quad (3)$$

Double Wheel

Bevor letztendlich die Reduktion vorgestellt wird, wird in diesem Abschnitt das Wissen aus den Präliminarien dafür genutzt, um die wesentliche Struktur in der Reduktion einzuführen, das *double wheel*. Ein *double wheel* ist eine Graphenstruktur, die in einen Graphen, zwischen zwei Knoten, eingefügt wird, beziehungsweise eine Kante ersetzt³. Beim Einfügen eines *double wheel* in einen Graphen $G = (V, E)$ zwischen den Knoten $v_1, v_2 \in V$ werden zuerst k neue Knoten $V' = V \cup \{u_1, \dots, u_k\}$ erzeugt. Dann werden alle neue Knoten als Ring miteinander verbunden.

$$E' = E \cup \{\{u_i, u_{(i+1)\%k}\}, \{u_{(i+1)\%k}, u_i\} : i \in \bar{k}\}$$

Anschließend werden alle neu hinzugefügten Knoten mit den Knoten v_1, v_2 verbunden.

$$E'' = E' \cup \{\{v_1, u_i\}, \{v_2, u_i\} : i \in \bar{k}\}$$

Der resultierende Graph $G' = (V', E'')$ hat dann ein eingefügtes *double wheel* mit Länge k , zwischen den Knoten v_1 und v_2 . Letztlich wird noch ein (G, Π) -*embedding*, mit minimaler Anzahl an *facial walks*, für G' zu einem (G', Π') -*embedding* erweitert. Für alle zu den Knoten u_2, \dots, u_{k-1} inzidenten Kanten werden die Permutationen so gewählt das sie exakt die Länge drei haben (z.B. u_2v_1, v_1u_3, u_3u_2). Für zwei Kanten e_1, e_2 , die v_1 und v_2 mit einem anderen Knoten verbinden, wird das *embedding* so angepasst das die *facial walks* um v_1u_k, u_ku_1, u_1v_1 bzw. um v_2u_1, u_1u_k, u_kv_2 erweitert werden.

Zusammengefasst hat der neue Graph $n + k$ Knoten, $q + 3k$ Kanten und $f + 2k - 2$ *facial walks*.⁴ Aus der Euler Formel folgt damit direkt der Genus für das neu gewählte (G', Π') -*embedding*.

$$g(G', \Pi') = g(G, \Pi) + 1 = g(G) + 1$$

³Der Unterschied beim Ersetzen einer Kante durch ein *double wheel* geht der Schritt voraus die Kante zu löschen. Anschließend wird das *double wheel* normal eingefügt.

⁴ $n = |V|, q = |E|$ und f ist die Anzahl der *facial walks* im (G, Π) -*embedding*

und

$$g(G) \leq g(G') \leq g(G) + 1$$

. Nach der Definition des *double wheel* bilden die neuen Knoten einen nicht separierenden Kreis der Länge k . Wenn k jetzt groß genug gewählt wird, kann die Schlussfolgerung des *facial excess* genutzt werden, um den Genus weiter einzuschränken. Sei $k \geq 5q - 3n + 10$ dann gilt

$$\text{fe}(\Pi', G') = \text{fe}(\Pi, G) + 6 \leq 5q - 3n + 6$$

mit Referenz auf [1][(5), S. 570] kann dann

$$g(G) = g(G' - V(C)) < g(G')$$

genutzt werden, um schließlich zu folgern

$$g(G') = g(G) + 1 \tag{4}$$

. Diese Aussage ist eine der wichtigsten in der Beweisführung. Nun kann das *double wheel* genutzt werden um den Genus direkt zu beeinflussen und somit strukturell ein Graph mit einem gewissen Genus zu erzeugen.

Weiter kann nun diese Aussage genutzt werden, um nochmals die Abschätzung des Genus von einem Graphen durch seinen minimalen Spannbaum zu verbessern. Sei $T = (V', E')$ ein Spannbaum von $G = (V, E)$ und G' der Graph der entsteht, wenn für jede Kante $e \in E \setminus E'$ in T ein *double wheel* eingefügt wird. Dann sagt Gleichung 4 aus, dass der Graph Genus sich bei jedem *double wheel* um eins erhöht und damit wird aus der Ungleichung 3 zur Gleichung

$$g(G') = q - n + 1 \tag{5}$$

.

3 Reduktion

Im letzten Schritt wird die letztendliche Reduktion auf das *independent set* Problem vorgestellt. Dafür wird erst das *independent set* Problem eingeführt und das Graph Genus Problem darauf, unter eine hypothetischen Annahme, reduziert. Anschließend wird die hypothetische Annahme gezeigt und damit die Reduktion abgeschlossen.

Definition 6 (*Independent Set*). Sei $G = (V, E)$ ein Graph und k eine beliebige natürliche Zahl. Das Entscheidungsproblem ob es eine Teilmenge $S \subseteq V$ gibt mit

$$\forall v_1, v_2((Sv_1 \wedge Sv_2) \rightarrow \neg E(v_1, v_2))$$

und $k \geq |S|$ ist die Entscheidungsvariante des independent set Problem.

Die Kardinalität des *independent set* S wird weiter als $\alpha(G) = |S|$ geschrieben. Für die Reduktion wird gezeigt, das für einen Graphen $G = (V, E)$ ein Graph G'' in polynomieller Zeit abgeleitet werden kann mit

$$g(G'') = |E| - \alpha(G)$$

. Dadurch wäre das *independent set* Problem $\alpha(G) \geq k$ aber durch das Graph Genus Problem lösbar mittels der Umformung $g(G'') \leq |E| - k$. Da die Ableitung in polynomieller Zeit erfolgt und da das *independent set* Problem bekanntlich NP-Vollständig ist, wäre damit das Graph Genus Problem auch NP-Vollständig. Es bleibt zu zeigen, das eine solche Ableitung existiert und diese korrekt ist.

Eine genauere Betrachtung der unter 2 eingeführten Herleitung zeigt, dass Ersetzen der Kanten eines Spannbaumes nicht den Graph Genus erhöht[1, S. 573, Absatz 2]. Sei T ein Spannbaum von $G = (V, E)$ und G' der Graph den man erhält, indem man erst alle Kanten in T durch ein *double wheel* ersetzt und dann analog zur Herleitung von 3 für alle nicht enthaltenden Kanten in T von G ein *double wheel* in G' einfügt. Für den Graphen G' gilt $g(G') = |E| - |V| + 1$. Weiter bestehen jetzt alle *facial walks* in G' entweder aus einem Dreieck, das explizit im *double wheel* eingefügt wurde oder einer Ansammlung aus Dreiecken, die für jede Kante, um einen Knoten $v \in G$, hinzugefügt wurden[1, S. 573, Absatz 3]. Weiter wird G'' aus G' erzeugt, indem ein neuer Knoten v_0 hinzugefügt wird und mit jeweils einem Knoten aus jedem Kreis, einem hinzugefügten *double wheel*, verschmolzen wird. Im folgenden wird nun gezeigt das es eine gleiche obere und unter Schranken für den Genus, abhängig zu $\alpha(G)$, des Graphen G'' gibt und damit die obige Aussage folgt.

Obere Schranke

Für die obere Schranke wird der Graph G' als Basis genommen und angenommen, es gibt bereits ein bekanntes *independent set* S zu G . Dann wird G zu einem neuen Graphen H abgeleitet, indem für jeden Knoten in $V \setminus S$ ein neuer Knoten hinzugefügt wird, mit Kanten an jedes benachbarte Dreieck in G' , das an v angrenzt. Dabei kann ein bestehendes *embedding*, ähnlich dem zur Herleitung von Gleichung 2, so erweitert werden, das beim Einfügen jeden Knotens der Genus maximal um eins erhöht wird. Da Kontraktion den Genus des Graphen nicht erhöht, können danach alle Knoten, die hinzugefügt wurden, zusammengefasst werden. Weiter ist H ein Supergraph von G'' und damit ergibt sich zusammenfassend für den Genus

$$g(G'') \leq g(H) \leq |E| - \alpha(G)$$

. Damit ist die obere Schranke gezeigt.

Untere Schranke

Durch die vorige obere Schranke kann zusätzlich auch der *facial excess*, durch seinen Zusammenhang zum Genus, eingeschränkt werden.

$$fe(\Pi', G'') \leq 5|E| - 12 + 3|V| \leq 3|V|^2 - 12$$

Wählt man die Länge der eingefügten *double wheels* nun größer $3|V|^2$ so folgt damit, das kein *facial walk* einen kompletten Kreis beinhalten kann, der durch ein *double wheel* eingefügt wurde. Daher geht jeder Π' -*facial walk* über mindestens einen Knoten $v(C)$, der nicht zu einem eingefügten Kreis gehört aber Teil des *double wheel* ist. Betrachtet man nun jeden *facial walk*, der eine Kante von einem Knoten u zu einem Kreis C enthält und fügt für jeden dieser Knoten eine Kante $uv(C)$ zu $G' - V(G)$ hinzu, erhält man einen Graphen H' vom Genus $g(G'')$. Letztlich wird H' noch ein Knoten v_0 hinzugefügt und mit allen Knoten der Form $v(C)$, zu einem neuen Graphen H'' verschmolzen. Sei $Y = \{v(C) : C \in G' - V\}$ die Menge aller Knoten der Form $v(C)$. Jede Kante ist nun inzident zu einem Knoten $v(C)$ und $X := V \setminus Y$ ist nicht inzident in G . Damit ist $|X| = |V| - |Y| \leq \alpha(G)$ eine untere Schranke für das *independent set* und für den Genus von H'' ergibt sich $g(H'') = (|E| + y) - (|V| + 1) + 1 \geq |E| - \alpha(G)$. Da H'' ein Teilgraph von H' ist gilt weiter $g(G'') = g(H') \geq g(H'') \geq |E| - \alpha(G)$. Damit sind obere und untere Schranke gleich und es gilt $g(G'') = |E| - \alpha(G)$.

4 Konklusion

Der von *C. Thomasson* erbrachte Beweis hat viele kleinere Herleitungen, die sich zu einem größeren Konstrukt zusammenbauen, welches abschließend als Werkzeug zu Reduktion des *independent set* Problem auf das Graph Genus Problem genutzt wird. Diese Ausarbeitung hat Grundlagen aus dem Bereich Graphentheorie aufgearbeitet, um diese Konstruktion nachzuvollziehen und die einhergehenden Herleitungen zu verstehen. Die dadurch erworbenen Erkenntnisse reichen aus um das Grundkonzept des Beweises zu verinnerlichen und dienen als Vorbereitung des Beweises selbst oder ähnlichen Reduktion dieser Thematik.

Literatur

- [1] C. Thomassen. *The Graph Genus Problem Is NP-Complete*. Journal Of Algorithms 10, 568-576 (1989)